

Michał Pióro¹, Piotr Gajowniczek, Michał Szcześniak
Instytut Telekomunikacji, Politechnika Warszawska

Zastosowanie algorytmu Symulowanej Alokacji do wymiarowania grafów sieci przepływowych odpornych na awarie²

W artykule sformułowane są dwa wybrane warianty problemu wymiarowania sieci telekomunikacyjnych odpornych na awarie. W przedstawionej postaci można je zastosować do dowolnej warstwy zasobów sieci (np. do sieci transmisyjnej SDH, sieci cyfrowych grup łączy, warstwy ścieżek wirtualnych sieci ATM). Jako metodę rozwiązywania tych zadań wykorzystano oryginalne podejście do zagadnień stochastycznej optymalizacji dyskretnej, nazywane Symulowaną Alokacją. Przedstawiono także porównanie skuteczności tej metody w odniesieniu do innych stosowanych metod.

1. Wprowadzenie

Problematyka projektowania sieci odpornych (*robust design*) znajduje się w centrum zainteresowania operatorów telekomunikacyjnych z uwagi na rosnące wymagania użytkowników w zakresie ciągłości i niezawodności świadczenia usług, a więc również w sytuacjach awaryjnych i stanach przeciążeniowych ([ACL94], [KDP94], [Med94]). W niniejszym artykule sformułowane zostały - w języku optymalizacji przepływów wielotowarowych [Assa78] - dwa wybrane warianty ogólnego problemu wymiarowania sieci odpornych. Zadania te należą do grupy problemów całkowitoliczbowych bez ustalonych pojemności krawędzi (*uncapacitated integral multicommodity flow problems*). W przedstawionej postaci można je zastosować do dowolnej warstwy zasobów sieci (np. do sieci transmisyjnej SDH, sieci cyfrowych grup łączy, warstwy ścieżek wirtualnych sieci ATM). Do ich rozwiązywania proponuje się stochastyczną metodę optymalizacji dyskretnej o nazwie *Symulowana Alokacja* (SA). Pokrewne zastosowanie tej metody do rozmieszczenia zapotrzebowań w istniejącej sieci o zadanych pojemnościach krawędzi zostało opisane w artykule [PG94] (w zastosowaniu do sieci transmisyjnych), w [PG95] (w zastosowaniu do warstwy ścieżek wirtualnych ATM) i w [PG96] (w zastosowaniu do innych problemów optymalizacji dyskretnej).

Precyzyjne sformułowanie warstwowych zadań wymiarowania sieci odpornych oraz skuteczne metody ich rozwiązywania są niezbędne w iteracyjnym procesie projektowania nowoczesnych sieci telekomunikacyjnych (zob. [Pio95a], [Pio95b]). Dotyczy to w szczególności wymiarowania infrastruktury zasobów komutacyjnych i transmisyjnych publicznych sieci telefonicznych (PSTN), jak również sieci ISDN i B-ISDN/ATM.

¹ Autor jest również pracownikiem Francusko-Polskiej Wyższej Szkoły Nowych Technik Informatyczno-Komunikacyjnych

² Artykuł powstał w ramach Projektu Badawczego KBN Nr 8T11D 008 08 "Projektowanie sieci telekomunikacyjnych metodą Symulowanej Alokacji"

2. Model sieci

Rozważane w tym artykule *sieci przepływowe* modelowane są za pomocą *multigrafu* $G=(V,E,R)$ składającego się ze zbioru węzłów V , zbioru krawędzi E oraz *relacji incydencji* węzłów i krawędzi R określonej na iloczynie kartezjańskim $V \times E \times V$. G , jako multigraf, dopuszcza istnienie wielu krawędzi pomiędzy dowolną parą węzłów - zbiór wszystkich krawędzi pomiędzy daną parą węzłów nazywa się *multikrawędzią*. Możliwość taka jest użyteczna przy modelowaniu sytuacji awaryjnych w sieci: w danej sytuacji awarii ulegają tylko niektóre z krawędzi wchodzących w skład multikrawędzi pomiędzy poszczególnymi parami węzłów. Gdy pomiędzy daną parą węzłów jest tylko jedna krawędź, wówczas nazywamy ją *unikrawędzią*. Gdy w grafie są tylko unikrawędzie, to nazywamy go, w odróżnieniu od multigrafu - *unigrafem*.

Pojemność (przepustowość) krawędzi $e \in E$ jest oznaczana przez $y(e)$, koszt jednostki pojemności krawędzi e , przez $\xi(e)$, a koszt stały związany z "otwarcie" nowej krawędzi - przez $\kappa(e)$. W sumie koszt krawędzi sieci wyrażamy jako:

$$C(y) = \sum_{e \in E} \xi(e) \cdot y(e) + \sum_{e \in E, y(e) > 0} \kappa(e), \quad (2.1)$$

gdzie $y: E \rightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją przypisującą pojemność krawędziom ($\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ jest zbiorem liczb naturalnych); $\kappa, \xi: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ są funkcjami kosztu ($\mathbb{R}^+$ jest zbiorem nieujemnych liczb rzeczywistych). Obciążenie $Z(v, y)$ węzła $v \in V$ wynikające z zadanej pojemności krawędzi y jest sumą pojemności wszystkich krawędzi incydentnych z tym węzłem:

$$Z(v, y) = \sum \{ y(e) : e \in E \ \& \ (\exists w \in V, (v, e, w) \in R) \}. \quad (2.2)$$

W artykule, tak jak we wzorze (2.2), suma postaci $\sum \{ f(x) : F(x) \}$ (gdzie $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą zmiennej x , a $F(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x) oznacza sumę $\sum_{F(x)} f(x)$.

W grafie G rozważać będziemy tylko *ścieżki (drogi) proste* (przechodzące przez węzły co najwyżej jeden raz), identyfikując je ze zbiorem krawędzi:

$$p = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}. \quad (2.3)$$

Niech D oznacza zbiór *zapotrzebowań*. Każde zapotrzebowanie $d \in D$ charakteryzują poniższe atrybuty:

- ▶ para węzłów $(s(d), t(d))$ pomiędzy którymi istnieje zapotrzebowanie
- ▶ wielkość zapotrzebowania $n(d)$, będąca liczbą *jednostek przepustowości*
- ▶ zbiór ścieżek *dopuszczalnych* $P(d)$; każda ścieżka $p \in P(d)$ jest ścieżką prostą łączącą węzły $s(d)$ i $t(d)$, służącą do realizacji części zapotrzebowania d .

W praktyce często istnieje wymaganie na agregację alokowanych w sieci jednostek przepustowości, aby każde zapotrzebowanie było realizowane w kilku niepodzielnych *modułach* grupujących jednostki przepustowości. Wszystkie jednostki przepustowości modułu są realizowane i odtwarzane zawsze razem (na jednej ścieżce). Wymaganie tego typu będziemy opisywać za pomocą *współczynnika agregacji* W . $W=100\%$ oznacza pełną agregację (każde zapotrzebowanie realizowane jest jako jeden moduł), $W=0\%$ oznacza pełną dezagregację (każda jednostka przepustowości zapotrzebowania może być realizowana i odtwarzana na "swojej" ścieżce).

Niech S oznacza rozpatrywany (zadany) zbiór sytuacji (stanów) awaryjnych. Każda sytuacja $s \in S$ jest scharakteryzowana następującymi współczynnikami:

- ▶ $\alpha(s, e)$: dostępna (pracująca) część pojemności krawędzi $e \in E$ w sytuacji s
- ▶ $\beta(s, d)$: wymagana do realizacji część jednostek zapotrzebowania $d \in D$ w sytuacji s .

Jeśli $s_0 \in S$ jest stanem nominalnym (bezawaryjnym), wówczas wszystkie współczynniki $\alpha(s_0, e)$ są równe 1. Zakładamy też, że dla stanu nominalnego wszystkie współczynniki $\beta(s_0, d)$ są równe 1. Współczynniki $\alpha(s, e)$ opisują skutki awarii w niższych (w stosunku do rozpatrywanej) warstwach sieci (por. [Pio95a]). Współczynniki $\beta(s, d)$ natomiast służą do obrazowania różnych sytuacji związanych ze zmieniającym się (np. w ciągu doby lub w wyniku awarii) zapotrzebowaniem na przepustowość (np. ruch). Zauważmy, że przyjęty model awarii (za pomocą współczynników α i β) uwzględnia również awarie węzłów (jeśli s modeluje awarię węzła v , wówczas przyjmujemy $\alpha(s, e) = 0$ i $\beta(s, d) = 0$ dla wszystkich krawędzi e i zapotrzebowań d incydentnych z węzłem v). Wyróżniamy cztery sposoby opisu wpływu awarii na dostępną pojemność krawędzi:

- ▶ Sposób 1: zabezpieczenie pasywne multikrawędzi. Dla każdej sytuacji s i krawędzi e , $\alpha(s, e) \in \{0, 1\}$. Oznacza to, że w sytuacji awaryjnej s krawędź albo w całości ulega awarii ($\alpha(s, e) = 0$), albo w całości jest sprawna ($\alpha(s, e) = 1$). Zatem podzbiór tych krawędzi pomiędzy daną parą węzłów, które w sytuacji s pozostają sprawne wyznacza łączną pojemność multikrawędzi pomiędzy tą parą węzłów, dostępną w rozpatrywanej sytuacji.
- ▶ Sposób 2: zabezpieczenie pasywne unikrawędzi. Dla każdej sytuacji s i każdej unikrawędzi e , $\alpha(s, e) \leq 1$. Zakłada się, że w sytuacji awaryjnej s sprawna pozostaje część pojemności krawędzi e równa $\alpha(s, e) \cdot y(e)$, lecz nie wiadomo, które przepływy realizowane w krawędzi w stanie nominalnym ulegają awarii w sytuacji s . Opisywany przypadek otrzymujemy traktując multikrawędzie w grafie G jako unikrawędzie, bez wnikania w strukturę ich krawędzi (struktura ta podsumowana jest przez podanie łącznej pojemności unikrawędzi $y(e)$ i współczynników $\alpha(s, e)$).
- ▶ Sposób 3: zabezpieczenie aktywne unikrawędzi. Dla każdej sytuacji s i każdej unikrawędzi e , $\alpha(s, e) \leq 1$. Zakłada się, że w sytuacji awaryjnej s sprawna pozostaje część pojemności krawędzi e równa $\alpha(s, e) \cdot y(e)$ oraz, co więcej, wybrane przepływy realizowane w krawędzi w stanie nominalnym mogą być przearanżowane w celu skorzystania z pojemności, która jest dostępna po awarii.
- ▶ Sposób 4: uproszczone zabezpieczenie aktywne unikrawędzi. Pojemność $y(e)$ każdej unikrawędzi e składa się z części niezawodnej $y'(e)$, która jest sprawna we wszystkich sytuacjach oraz z części zawodnej $y''(e)$. W każdej sytuacji nienominalnej $s \in S \setminus \{s_0\}$ część zawodna jest albo całkowicie sprawna, albo całkowicie niesprawna. Podobnie jak w Sposobie 3, zakłada się, że wybrane przepływy realizowane w krawędzi w stanie nominalnym są odtwarzane za pomocą pojemności, która jest dostępna po awarii. Przypadek ten można modelować zastępując każdą unikrawędź $e \in E$ multikrawędzią złożoną z dwóch krawędzi: krawędzi niezawodnej e' ($\alpha(e', s) \equiv 1$) i krawędzi zawodnej e'' ($\alpha(e'', s) \in \{0, 1\}$).

3. Problemy wymiarowania sieci

W celu zrealizowania zapotrzebowania na przepustowość $d \in D$ (które wynosi $n(d)$ jednostek) należy wskazać, jaka część $x(d, p)$ tego zapotrzebowania (przepływ) realizowana jest na każdej dostępnej ścieżce $p \in P(d)$.

Funkcję całkowitoliczbową $x:Q \rightarrow \mathbb{N}$, gdzie

$$Q = \{ (d,p): d \in D, p \in P(d) \} \quad (3.1)$$

nazywamy *funkcją alokacji* lub *przepływu*, a jej wartości - *przepływami*. Dla ustalonego x wartość:

$$r(d,x) = \sum \{ x(d,p): p \in P(d) \} \quad (3.2)$$

nazywamy *stopniem realizacji zapotrzebowania* $d \in D$, a wartość

$$o(e,x) = \sum \{ x(d,p): d \in D, p \in P(d), e \in p \} \quad (3.3)$$

obciążeniem krawędzi $e \in E$ (wyrażonym w modułach zapotrzebowań na przepustowość) wynikającym z funkcji przepływu x . Wreszcie przez $f_e(o)$ oznaczamy minimalną pojemność krawędzi e niezbędną do realizacji obciążenia o (zauważmy, że funkcje $f_e(\cdot)$ nie muszą być liniowe).

3.1. Wymiarowanie sieci dla stanu nominalnego

Dla ilustracji przedstawimy teraz problem wymiarowania sieci dla stanu nominalnego, czyli dla przypadku, gdy zbiór sytuacji S składa się tylko z jednego elementu s_0 . Sformułowane tu zadanie, nazywane także problemem tradycyjnym, oznaczone będzie jako Zadanie 0, dla odróżnienia go od zadań dotyczących projektowania sieci odpornej na awarie.

Zadanie 0: wymiarowanie dla stanu nominalnego

Dla zadanego zbioru zapotrzebowań D znaleźć

► funkcję pojemności krawędzi y

► funkcję alokacji x

minimalizujące koszt sieci (2.1) przy ograniczeniach

$$\text{► } r(d,x) = n(d), d \in D \quad (3.4)$$

$$\text{► } x(d,p) \leq b(d) \cdot n(d), d \in D, p \in P(d) \quad (3.5)$$

$$\text{► } f_e(o(e,x)) \leq y(e), e \in E \quad (3.6)$$

$$\text{► } Z(v,y) \leq z(v), v \in V. \quad (3.7)$$

Ograniczenie (3.4) gwarantuje zrealizowanie zapotrzebowań, natomiast warunek (3.5) ma charakter niezawodnościowy - nie pozwala realizować więcej niż część $b(d)$ (liczby $b(d)$ są ustalone) przepustowości $n(d)$ na jednej ścieżce. Ograniczenie (3.6) zapewnia dostateczną pojemność krawędzi, a warunek (3.7) nakłada ograniczenia na obciążenie węzłów (liczby $z(v)$ są zadane). Ze względu na całkowitoliczbowość (modularność) funkcji y oraz x , nawet przy liniowych funkcjach $f_e(\cdot)$ powyższy problem jest na ogół *NP*-zupełny [GARE79]. Zagadnienie modularności ilustruje następujący przykład.

Przykład 1

Załóżmy, że zapotrzebowania na przepustowość $n(d)$ wyrażone są liczbą strumieni 2 Mb/s, a pojemność krawędzi $y(e)$ - liczbą modułów STM-1. Wówczas dla każdej krawędzi mamy $f_e(o) = \lceil o/63 \rceil$, gdyż jeden moduł STM-1 może transportować 63 kontenery VC-12 [Wu92]. Zauważmy, że dla takich funkcji ograniczenie (3.6) można równoważnie zapisać w postaci

$$o(e,x) \leq m \cdot y(e), e \in E \quad (m=63). \quad (3.6')$$

3.2. Wymiarowanie sieci odpornej

Poniżej przedstawimy dwa wybrane warianty problemu wymiarowania sieci odpornej na awarie. Pierwszy z nich zakłada pełną rekonfigurację przepływów na wypadek poszczególnych sytuacji $s \in S$ (oznacza to możliwość rozmieszczenia przepływów całkowicie "od nowa" w każdej sytuacji - nawet tych, które nie uległy uszkodzeniu). Drugi stanowi zadanie z tzw. minimalną rekonfiguracją przepływów, czyli wymaganiem, aby na wypadek awarii następowała realokacja tylko tych przepływów, które uległy uszkodzeniu. Dodatkowo, rekonfiguracja ta jest uproszczona, ponieważ każdy przepływ zabezpieczony jest tylko jedną ścieżką zabezpieczającą. Ze względu na ograniczone ramy tego artykułu będziemy brać pod uwagę tylko awarie krawędzi. Uwzględnienie awarii węzłów nie jest trudne - jest to dość oczywiste uogólnienie zadań podanych poniżej. Problemy wymiarowania sieci odpornych są, podobnie jak problem tradycyjny, *NP*-zupełne.

3.2.1. Wymiarowanie sieci odpornej z pełną realokacją

Rozwiązanie poniższego zadania wyznacza przepływy we wszystkich sytuacjach $s \in S$, z których jedna (dla której $\alpha(s, e) \equiv 1$ i $\beta(s, d) \equiv 1$) jest stanem nominalnym. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w zadaniu tym nie ma konieczności wyróżniania stanu nominalnego sieci przed rozpoczęciem optymalizacji. Dla powyższego zadania wystarczający jest także najprostszy model krawędzi (por. Sposób 2 w Rozdziale 2).

Zadanie 1: wymiarowanie odporne z pełną realokacją

Dla danych

- ▶ zbioru zapotrzebowań D
- ▶ zbioru sytuacji awaryjnych S
- ▶ współczynników $\alpha(s, e)$
- ▶ współczynników $\beta(s, d)$

znaleźć

- ▶ funkcję pojemności krawędzi y
 - ▶ funkcje alokacji x_s dla wszystkich sytuacji $s \in S$
- minimalizujące koszt sieci (2.1) przy ograniczeniach

$$\triangleright r(d, x_s) \geq \beta(s, d) \cdot n(d), \quad d \in D, s \in S \quad (3.8)$$

$$\triangleright f_e(o(e, x_s)) \leq \alpha(s, e) \cdot y(e), \quad e \in E, s \in S \quad (3.9)$$

$$\triangleright Z(v, y) \leq z(v), \quad v \in V. \quad (3.10)$$

Przy założeniach Przykładu 1 (por. Rozdział 3.1), ograniczenie (3.9) przybiera postać

$$o(e, x_s) \leq m \cdot \lfloor \alpha(s, e) \cdot y(e) \rfloor, \quad e \in E, s \in S. \quad (3.9')$$

3.2.2. Wymiarowanie sieci odpornej z minimalną realokacją

Uproszczone zabezpieczenie przed awariami uzyskujemy zakładając, że każdemu dodatniemu przepływowi nominalnemu $x_0(d, p)$ przyporządkowujemy pojedynczą ścieżkę zabezpieczającą $p' \in P(d)$ (na ogół rozłączną z p), której wszystkie krawędzie pozostają sprawne w przypadku dowolnej awarii dotyczącej którejkolwiek krawędzi ścieżki p , i której używać będziemy do odtwarzania przepływu $x_0(d, p)$ we wszystkich sytuacjach awaryjnych tego przepływu. Formalnie warunek na ścieżkę p' można zapisać dla dowolnej pary $(d, p) \in Q$ w poniższy sposób:

$$p' \in P(d) \ \& \ (\forall s \in S \setminus \{s_0\}, (\exists e \in p, \alpha(s, e) = 0) \rightarrow (\forall e' \in p', \alpha(s, e') = 1)). \quad (3.11)$$

Sformułowanie całego zadania jest następujące.

Zadanie 2: wymiarowanie odporne z pojedynczą ścieżką zabezpieczającą

Dla danych

- ▶ zbioru zapotrzebowań D
- ▶ zbioru sytuacji awaryjnych S
- ▶ współczynników $\alpha(s, e)$

znaleźć

- ▶ pojemności krawędzi y
- ▶ funkcje alokacji x_s dla wszystkich sytuacji $s \in S$ (w tym funkcję alokacji x_0 dla stanu nominalnego $s_0 \in S$)
- ▶ funkcję $\varphi: Q \rightarrow \bigcup_{d \in D} P(d)$ przyporządkowującą każdej parze $(d, p) \in Q$ ścieżkę zabezpieczającą $p' = \varphi(d, p)$, spełniającą warunek (3.11)

minimalizujące koszt sieci (2.1) przy ograniczeniach

$$\forall s \in S, (\forall e \in p, \alpha(s, e) = 1) \rightarrow x_s(d, p) = x_0(d, p), \text{ dla } d \in D, p \in P(d) \quad (3.12)$$

$$\forall s \in S \setminus \{s_0\}, (\exists e \in p, \alpha(s, e) = 0) \rightarrow x_s(d, \varphi(d, p)) = x_0(d, p), \text{ dla } d \in D, p \in P(d) \quad (3.13)$$

$$r(d, x_s) = n(d), \text{ dla } d \in D, s \in S \quad (3.14)$$

$$f_e(o(e, x_s)) \leq \alpha(s, e) \cdot y(e), \text{ dla } e \in E, s \in S \quad (3.15)$$

$$Z(v, y) \leq z(v), \text{ dla } v \in V. \quad (3.16)$$

4. Metoda Symulowanej Alokacji

SA jest stochastyczną metodą optymalizacji dyskretniej, a jej działanie polega na generowaniu trajektorii procesu stochastycznego z czasem dyskretnym, polegającego na alokacji i rozłączaniu modułów zapotrzebowań. Poniżej opiszemy ideę działania metody Symulowanej Alokacji (SA) na przykładzie Zadania 0 wymiarowania sieci dla stanu nominalnego. Przy opisie SA zakładamy pełną dezagregację alokacji jednostek zapotrzebowań ($W=0\%$). W dalszym ciągu będziemy dla prostoty pomijać ograniczenie (3.7) na pojemność węzłów.

4.1. Idea SA

W metodzie SA generowana jest trajektoria procesu stochastycznego (zwanego *procesem alokacji*) z czasem dyskretnym o przestrzeni stanów X , gdzie każdy stan $x \in X$ jest funkcją przepływu określoną w Rozdziale 3. Przez $|x|$ oznaczamy liczbę jednostek przepustowości zaalokowanych w stanie x , tzn. $|x| = \sum_{d \in D} r(d, x)$. Stan x nazywamy *maksymalnym*, gdy dla każdego $d \in D$ zachodzi $r(d, x) = n(d)$. Chwile czasu $i=0, 1, 2, \dots$ procesu alokacji odpowiadają kolejnym przyjściom lub rozłączeniom jednostek (lub ogólniej modułów) zapotrzebowania (przypomnijmy, że moduły zapotrzebowania są zagregowanymi wg współczynnika agregacji jednostkami przepustowości).

Niech x^i będzie stanem procesu w chwili i . Stan w następnej chwili czasu, x^{i+1} , konstruuje się - następująco. Najpierw ustala się, czy następnym zdarzeniem (zachodzącym w chwili $i+1$) jest przyjsie jednostki przepustowości do alokacji w grafie, czy też rozłączenie (dealokacja) wcześniej zaalokowanej jednostki przepustowości. Załóżmy na razie, że zdarzenie polegające na przyjsiu zgłoszenia wynosi q dla wszystkich stanów nie będących stanami maksymalnymi (dla każdego stanu maksymalnego przyjmujemy $q=0$, a dla stanu zerowego $q=1$).

Alokacja. Spośród wszystkich niezrealizowanych w stanie x^i jednostek przepustowości (dla zapotrzebowania d jest $n(d)-r(d,x^i)$ takich jednostek) wybieramy do alokacji jedną z nich, np. w sposób przypadkowy. Załóżmy, że do alokacji wybraliśmy jednostkę przepustowości dla zapotrzebowania d . Stosując teraz pewną *regulę alokacji*, wybieramy jedną ze ścieżek ze zbioru $P(d)$ (powiedzmy ścieżkę p) dla zrealizowania rozpatrywanej jednostki. Nowy stan definiujemy zwiększając o 1 wartość przepływu $x^i(d,p)$ (czyli przyjmujemy $x^{i+1}(d,p)=x^i(d,p)+1$), nie zmieniając pozostałych wartości).

Dealokacja. Spośród wszystkich zrealizowanych w stanie x^i jednostek przepustowości (dla zapotrzebowania d jest $r(d,x^i)$ takich jednostek) wybieramy do rozłączenia jedną z nich, np. w sposób przypadkowy. Załóżmy, że do rozłączenia wybraliśmy jednostkę przepustowości zapotrzebowania d zrealizowaną ścieżką $p \in P(d)$. Nowy stan definiujemy zmniejszając o 1 wartość przepływu $x^i(d,p)$ (czyli przyjmujemy $x^{i+1}(d,p)=x^i(d,p)-1$), nie zmieniając pozostałych wartości.

W każdym stanie przyjmujemy, że pojemność krawędzi wynika z ich obciążenia (tzn. $y(e)=f_e(o(e,x^i))$), a w związku z tym koszt sieci $C(x^i)=C(y)$ dany jest wzorem (2.1). Niech L oznacza sumę wszystkich jednostek przepustowości: $L=\sum_{d \in D} n(d)$. Można wykazać (por. [Fel77], Rozdz. XIV), że wartość oczekiwana liczby chwil czasu (kroków) generowanej trajektorii procesu alokacji, jaka upływa od stanu, w którym jest zaalokowanych l jednostek do momentu osiągnięcia stanu maksymalnego jest ograniczona od góry przez liczbę $(L-l)/(2q-1)$ (zakładamy tu, że $q > 1/2$). Dla przykładu, zaczynając od stanu zerowego i przyjmując $q=2/3$, stan maksymalny osiągniemy po raz pierwszy średnio po $3L$ krokach.

Oczywiście prawdopodobieństwo alokacji q może zależeć od stanu. W stanach bliskich maksymalnym można np. obniżać $q(x^i)$, aby dokładniej przeszukiwać przestrzeń stanów w celu znalezienia stanu maksymalnego bliskiego stanowi *optymalnemu* (tzn. stanowi maksymalnemu minimalizującemu funkcję kosztu (2.1)).

4.2. Reguły alokacji i dealokacji

Przykładem reguły alokacji jest zasada wyboru tej ścieżki p ze zbioru $P(d)$, która minimalizuje przyrost wartości kosztu $\Delta(p)=C(x^{i+1})-C(x^i)$ (stan x^{i+1} powstaje ze stanu x^i przez zaalokowanie jednostki przepustowości na ścieżce p). W przypadku, gdy reguła ta nie rozstrzyga, którą ścieżkę wybrać, można zastosować kryterium drugiego rzędu, wybierając np. ścieżkę która maksymalizuje łączną, nieobciążoną po alokacji w stanie x^{i+1} pojemność krawędzi. Taką niewykorzystaną pojemność definiujemy jako liczbę k jednostek przepustowości, którymi możemy dodatkowo obciążyć daną krawędź nie zwiększając jej pojemności (dla bieżącego obciążenia o , k jest największą liczbą całkowitą taką, że $f_e(o+k)=f_e(o)$).

Polepszenie skuteczności metody SA można często uzyskać modyfikując powyższą regułę alokacji przez dodanie do *inkrementalnego kosztu ścieżki* $\Delta(p)$ składnika $c(|x^i|)|p|$ proporcjonalnego do długości ścieżki wyrażonej liczbą krawędzi, co faworyzuje wybór ścieżek krótszych. Współczynnik proporcjonalności $c(|x^i|)$ powinien być nierosnącą funkcją liczby $|x^i|$, dążącą do 0 przy $|x^i| \rightarrow L$ oraz przybierającą wartości pozostające w rozsądnej relacji do wartości kosztu inkrementalnego $\Delta(p)$. Dodatkową możliwością jest stosowanie w stanach odległych od maksymalnych zmodyfikowanej, niemodularnej funkcji $f_e(\cdot)$. Dla funkcji z Przykładu 1 może to być funkcja $f_e'(o) = o/63$.

Procedurę wyboru ścieżki dla zapotrzebowania d z ustalonego z góry zbioru $P(d)$ nazywamy wyborem *statycznym*. W SA istnieje również możliwość *dynamicznego* wyszukiwania ścieżki do

alokacji jednostki przepustowości zapotrzebowania d , np. za pomocą algorytmu Dijkstry wyszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie [Che90]. Pewnym problemem przy wyborze dynamicznym może być zdefiniowanie odpowiedniej metryki (długości) krawędzi grafu G .

Przy alokacji jednostki przepustowości można wybierać zapotrzebowanie $d \in D$ w sposób inny niż przypadkowy, np. gdy alokacja pewnych zapotrzebowań jest ważniejsza niż innych. Podobnie jest przy dealokacji. Na przykład skutecznym zabiegiem jest często zwiększenie prawdopodobieństwa wyboru jednostek przepustowości realizowanych długimi ścieżkami, obciążającymi pojemność wielu krawędzi. Skuteczne jest też rozłączanie w pewnych stanach więcej niż jednej zaalokowanej jednostki. Można to robić np. w momencie osiągnięcia stanu maksymalnego (niekoniecznie za każdym razem). Zabieg taki nazywamy zastosowaniem *ekranu*. Typowym ekranem jest rozłączenie wszystkich jednostek przepustowości korzystających z wybranego (np. losowo) zbioru krawędzi. Można również rozważać uczące się reguły alokacji/dealokacji, których decyzje zależą od dotychczasowego przebiegu generowanej trajektorii, co daje szansę wykrywania, a następnie unikania błędnych decyzji, prowadzących do niepożądanych z globalnego punktu widzenia alokacji czy rozłączeń.

Inne zagadnienie to kwestia wyboru stanu początkowego x^0 . Najprościej jest przyjąć stan zerowy ($x_s^0(d,p) \equiv 0$); można też jako stan początkowy zastosować rozwiązanie uzyskane inną metodą (np. najprostszą - wszystkie przepływy kierować na najkrótsze ścieżki w sensie metryki $\xi(e)$). Z kolei najprostszym kryterium zakończenia pracy jest wygenerowanie trajektorii o założonej liczbie kroków (lub założonej liczbie dojść do stanu maksymalnego) i podanie najlepszego (w sensie kosztu (2.1)) rozwiązania.

Na koniec tych rozważań zauważmy, że zwykle istnieje wiele możliwości wyboru reguł alokacji czy dealokacji. Na ogół, efektywność poszczególnych reguł zależy od konkretnego zadania wymiarowania, a zatem wybór skutecznych reguł jest pewną sztuką, należącą do "kuchni" Symulowanej Alokacji. Należy jednak pamiętać, że w duchu metody SA jest wybór prostych reguł, prowadzących do szybkich (w sensie czasu obliczeń) decyzji alokacji i dealokacji, gdyż istota skuteczności proponowanego podejścia leży w masowości przetwarzanych zdarzeń alokacji/dealokacji. Istotne jest też, aby stosowane reguły nie ograniczały przestrzeni przeszukiwanych stanów.

5. Zastosowanie SA do zadań projektowania odpornego

Poniżej opiszemy warianty Symulowanej Alokacji dla odpowiednich zadań wymiarowania odpornego, zdefiniowanych w Podrozdziałach 3.2 i 3.3. Dla uproszczenia prezentacji będziemy zwykle zakładać pełną dezagregację alokacji jednostek zapotrzebowań ($W=0\%$) oraz pomijać ograniczenie (3.7). Rozszerzenie poniższych wariantów SA w celu uwzględnienia powyższych kwestii jest, jak zobaczymy, dość oczywiste.

5.1. Inkrementalny koszt alokacji jednostki przepustowości

Uogólniając metodę SA na zadania projektowania odpornego, przez stan trajektorii procesu alokacji w chwili i ($i=0,1,\dots$) rozumiemy wektor

$$x^i = (x_s^i: s \in S), \quad (5.1)$$

gdzie x_s^i jest funkcją alokacji dla sytuacji s w chwili i . Z każdą krawędzią $e \in E$ związana jest lista jej obciążeń $o(e, x_s^i)$ dla poszczególnych sytuacji $s \in S$, wyznaczająca warunek na minimalną pojemność krawędzi e w stanie x^i :

$$\alpha(s, e) \cdot y(e) \geq f_e(o(e, x_s^i)). \quad (5.2)$$

Warunek (5.1) definiuje sposób wyznaczania pojemności krawędzi $y(e)$ dla stanu x^i w procesie alokacji. W stanie x^i w każdej krawędzi e istnieje $\lfloor \alpha(s, e) \cdot y(e) \rfloor - f_e(o(e, x_s^i))$ "darmowych" jednostek pojemności dla sytuacji s , które można wykorzystać do alokacji jednostek przepustowości dla tej sytuacji. Jeśli położymy jednostkę przepustowości dla sytuacji s na krawędzi e w stanie x^i , wówczas w stanie x^{i+1} nastąpi przyrost pojemności krawędzi e określony przez wartość $\Delta(e, s, x^i) = \max\{\lfloor f_e(o(e, x_s^i) + 1) / \alpha(s, e) \rfloor - y(e), 0\}$ (uwzględnienie przypadku $\alpha(s, e) = 0$ jest oczywiste - przyrost kosztu krawędzi jest nieskończony). Podsumowując, dla danej sytuacji s , inkrementalny koszt położenia jednostki przepustowości na krawędzi e wynika z dwóch czynników: z obciążenia krawędzi e przez funkcje alokacji dla innych sytuacji oraz z modularności funkcji $f_e(\cdot)$. W związku z tym inkrementalny koszt alokacji jednostki przepustowości na ścieżce p w sytuacji s w stanie x^i wynosi:

$$\Delta(p, s, x^i) = \sum_{e \in p} \Delta(e, s, x^i). \quad (5.3)$$

5.2. Warianty SA dla Zadania 1

Dla rozwiązywania Zadania 1 z pełną rekonfiguracją przepływów wystarczy rozpatrywać najprostszy model zabezpieczania krawędzi (Sposób 2 z Podrozdziału 2.1 - zabezpieczenie pasywne unikrawędzi). Poniżej opisane są dwa warianty metody SA dla Zadania 1.

5.2.1. Metoda cząstkowej alokacji awarii

W metodzie tej całkowita liczba jednostek pojemności do rozmieszczenia wynosi $L = \sum_{s \in S} \sum_{d \in D} \beta(s, d) \cdot n(d)$, a więc jest równa sumie wszystkich jednostek przepustowości, ze wszystkich zapotrzebowań oraz wszystkich sytuacji awaryjnych.

Alokacja. Alokowana jednostka przepustowości wybierana jest losowo spośród wszystkich dotychczas niezaalokowanych jednostek, a następnie umieszczana na ścieżce z minimalnym kosztem inkrementalnym, określonym przez (5.3). Alokowana jednostka jest scharakteryzowana przez zapotrzebowanie d , z którego pochodzi oraz sytuację s , której funkcję przepływu realizuje (można stosować też nieco bardziej skomplikowane reguły - por. Podrozdział 4.2).

Dealokacja. Najprostszą możliwością jest rozłączanie losowo wybranej jednostki przepustowości (można stosować też nieco bardziej skomplikowane reguły - por. Podrozdział 4.2).

Pewną niedogodnością tego wariantu metody SA jest znaczna liczba jednostek pojemności do rozmieszczenia (można to jednak złagodzić stosując agregację alokowanych jednostek dla poszczególnych zapotrzebowań). Wariant ten pozwala jednak wykorzystywać już położoną pojemność krawędzi do realizacji jednostek ze wszystkich sytuacji (jeżeli wszystkie współczynniki $\beta(s, d)$ są równe jeden, to średnia liczba zaalokowanych jednostek przepustowości jest taka sama dla każdej sytuacji).

5.2.2. Metoda pełnej alokacji awarii

Poniższy wariant metody SA dla Zadania 1 znacznie różni się od poprzedniego i polega na jednoczesnej alokacji lub rozłączaniu wszystkich jednostek przepustowości realizujących wylosowaną sytuację s . Można to interpretować tak, jakby umowną "jednostką", przeznaczoną do alokacji była sytuacja s . Liczba takich "jednostek" jest więc równa liczbie uwzględnianych dla danej sieci sytuacji (czyli $L = |S|$). Zazwyczaj więc nie jest ona nazbyt duża. W dowolnym stanie x^i każda sytuacja jest albo całkowicie zrealizowana ($\forall d \in D, r(d, x_s^i) = 0$), albo całkowicie niezrealizowana ($\forall d \in D, r(d, x_s^i) = \beta(s, d) \cdot n(d)$).

Alokacja. Alokowane są wszystkie (rzeczywiste) jednostki przepustowości realizujące przepływy $x_s(d, p)$ sytuacji s (liczba takich jednostek wynosi $\sum_{d \in D} \beta(s, d) \cdot n(d)$) spełniające ograniczenia (3.8). W tym celu należy zastosować odpowiedni algorytm, np. metodę SA w wersji opisanej w Rozdziale 4 lub inny algorytm heurystyczny.

Dealokacja. Rozłączane są wszystkie jednostki przepustowości wylosowanej sytuacji awaryjnej.

5.3. Wariant metody SA dla Zadania 2

Najogólniej mówiąc zastosowanie SA do Zadania 2 polega na przekierowywaniu modułów uszkodzonych w poszczególnych awariach. Liczba jednostek pojemności do rozmieszczenia jest stała i wynosi $L = \sum_{d \in D} n(d)$. Poniżej dla uproszczenia przyjmuje się, że $\beta(s, d) = 1$ dla wszystkich s i d oraz zakłada się Sposób 1 lub Sposób 4 zabezpieczenia krawędzi (zob. Rozdział 2). Działanie algorytmu jest następujące:

Alokacja. Nominalna jednostka przepustowości alokowana jest na wybranej ścieżce p , a wraz z nią wszystkie *jednostki skojarzone* (czyli odpowiadające jej jednostki przepustowości dla sytuacji nienominalnych) na wybranej ścieżce obejściowej $\varphi(p)$, wspólnej dla wszystkich sytuacji, w których uszkodzona jest ścieżka nominalna p . Aby spełnić ograniczenie (3.11), po zaalokowaniu nowej nominalnej jednostki przepustowości na ścieżce p należy dokonać agregacji wszystkich jednostek umieszczonych aktualnie na tej ścieżce w jeden moduł i odtworzyć go na (na ogół) nowej wspólnej ścieżce $\varphi(p)$.

Dealokacja. Rozłączana jest losowo wybrana jednostka ze stanu nominalnego oraz wszystkie jednostki z nią skojarzone.

Przy alokacji główny problem polega na wyznaczeniu najtańszych ścieżek dla rozkładanych jednostek przepustowości (zarówno ścieżki nominalnej, jak i ścieżek obejściowych). Rozpatrzmy dwie poniższe możliwości.

Reguła 1. Wybierana jest najtańsza ścieżka ze względu na koszt realizacji jednostki przepustowości w sytuacji nominalnej. Zazwyczaj już po niedługim czasie generowania trajektorii procesu alokacji na wszystkich krawędziach są umieszczone jednostki skojarzone, co powoduje, że koszty ścieżek dla nowo alokowanych jednostek nominalnych są z dużym prawdopodobieństwem równe 0. Algorytm wybiera wtedy losową ścieżkę z zestawu ścieżek o tym samym koszcie (lub posiłkuje się kryterium drugiego rzędu). Wadą tej możliwości jest nieuwzględnianie kosztu ścieżki obejściowej przy wyborze ścieżki nominalnej.

Reguła 2. Wybierana jest ścieżka nominalna minimalizująca zarówno koszt położenia jednostki nominalnej, jak i wszystkich jednostek z nią skojarzonych. Praktyczny sposób realizacji tej reguły jest następujący. Dla ścieżki nominalnej p określamy zbiór tych awarii, które powodują jej niedostępność (oznaczymy ten zbiór przez $T(p)$). Jeśli $s(e)$ oznacza sytuację, dla której krawędź e wymaga największej przepustowości (por. (5.1)), to dla każdej sytuacji $s' \in T(p)$ wyznaczamy koszt inkrementalny krawędzi e jako:

$$\max \{ \lceil f_e(o(e, x_{s'}^i) + 1) / \alpha(s', e) \rceil - \lceil f_e(o(e, x_{s(e)}^i) / \alpha(s(e), e) \rceil : s' \in T(p) \}. \quad (5.4)$$

Dla każdej ścieżki nominalnej p można więc określić koszty inkrementalne krawędzi (po ewentualnej realizacji ścieżki nominalnej) i znaleźć najtańszą ścieżkę $\varphi(p)$ ją zabezpieczającą. Na niej realizujemy wszystkie jednostki skojarzone dla wszystkich sytuacji $s' \in T(p)$.

Znajdowanie ścieżki zabezpieczającej można przeprowadzać statycznie, w zbiorze predefiniowanych ścieżek lub dynamicznie (np. przy użyciu algorytmu Dijkstry, por. [Che90]). Dynamiczne znajdowanie zarówno ścieżki nominalnej jak i zabezpieczającej jest na ogół czasochłonne (por. [Szc96a]); w praktyce ścieżka nominalna dla zapotrzebowania $d \in D$ wybierana jest więc z predefiniowanego zbioru ścieżek dopuszczalnych $P(d)$.

6. Przykłady numeryczne - projektowanie krajowej sieci transmisyjnej

W rozdziale tym omówimy wyniki optymalizacji przykładowej sieci przy użyciu Symulowanej Alokacji oraz innych metod optymalizacyjnych, zaadaptowanych do projektowania sieci odpornych. Poszczególne procedury optymalizacyjne, będące wariantami metody SA (por. Rozdział 5) zaimplementowane zostały w języku C, przy wykorzystaniu wspólnego jądra algorytmu (*SAEngine*), realizującego implementację tzw. *wektora alokacji*, opisanego np. w [PG94].

Przedstawiony przykład oparty jest na projektowanej strukturze polskiej sieci transmisyjnej SDH. Sieć ta posiada 12 węzłów, 18 krawędzi i 66 zapotrzebowań. W sumie należy zaalokować 1705 jednostek przepustowości. Sytuacje awaryjne polegają na pojedynczych awariach całych krawędzi ($\alpha(s, e) \in \{0, 1\}$). Modularność pojemności krawędzi wynosi 63 (pojemność kontenera STM-1), co oznacza, że krawędź o pojemności $y(e)$ realizuje $63y(e)$ jednostki przepustowości zapotrzebowań, które odpowiadają kontenerom VC-12. Koszt jednostkowy $\xi(e)$ każdej krawędzi wynosi 1, a koszt stały $\kappa(e)$ - 0. Wyniki dla poszczególnych zadań przedstawione są w Tabelach 6.1-6.3.

W przypadku Zadania 0 parametr mówiący o rodzaju ścieżki (*statyczna* lub *dynamiczna*) wskazuje sposób, w jaki wybierano ścieżkę nominalną dla każdej z alokowanych jednostek. W przypadku Zadania 2 parametr ten określa sposób znajdowania ścieżki obejściowej (ścieżka w stanie nominalnym wybierana jest zawsze statycznie z predefiniowanego zbioru ścieżek dopuszczalnych). Z porównania tabel 6.2 i 6.3 wynika, że zastosowanie SA do Zadania 2 pozwala na osiągnięcie wyników zbliżonych do rezultatów uzyskiwanych dokładną metodą podziału i ograniczeń za pomocą pakietu optymalizacyjnego CPLEX [Cp94]. Godne uwagi jest, że zadanie z agregacją jednostek zapotrzebowań może być rozwiązane efektywnie tylko przy użyciu metody SA.

W poniższych tabelach metoda BENDERS oznacza zastosowanie dekompozycji Bendersa do zadań programowania liniowego ([Szc96a], [Szc96b]), a metoda LAGRANGE - zastosowanie relaksacji Lagrange'a ([Szc95a]). Metoda EWOLUC oznacza wykorzystanie algorytmu ewolucyjnego wg strategii opisanej w [AK96]. Ograniczenie dolne funkcji kosztu jest to wartość uzyskiwana z

rozwiązania danego zadania metodą programowania liniowego (pomijając całkowitościowość, z zaokrągleniem rezultatu do liczby całkowitej). Rozwiązanie "na najkrótszych ścieżkach" oznacza, że wszystkie jednostki pojemności dla danego zapotrzebowania rozmieszczane są na tej samej, najkrótszej ścieżce. Wreszcie, zaokrąglanie rozwiązania ciągłego (oznaczone skrótem zaokr.) oznacza, że w trakcie optymalizacji metodą SA rezygnujemy z uwzględniania modularności - otrzymany rezultat jest zaokrąglany tak, aby otrzymać rozwiązanie modułowe, dopiero po osiągnięciu przez trajektorię procesu alokacji/dealokacji stanu maksymalnego.

Tabela 6.1. Rezultaty osiągnięte przez różne algorytmy dla Zadania 0

algorytm	ograniczenie dolne funkcji kosztu	koszt najlepszego rozwiązania	rozwiązanie na najkrótszych ścieżkach
SA, W=0%, ścieżki statyczne	-	60	65
SA, W=100%, ścieżki statyczne	-	60	65
SA, W=100%, ścieżki dynamiczne	-	58	65
BENDERS, W=0%, ścieżki statyczne	62	62	-
LAGRANGE, W=0%, ścieżki statyczne	55	61	-
CPLEX, W=0%, ścieżki statyczne	58	59	-
CPLEX, W=100%, ścieżki statyczne	58	78	-
EWOLUC, ścieżki statyczne	62	62	-

Tabela 6.2. Rezultaty osiągnięte przez różne algorytmy dla Zadania 1

algorytm	ograniczenie dolne funkcji kosztu	koszt najlepszego rozwiązania	rozwiązanie na najkrótszych ścieżkach
SA, W=100%, ścieżki statyczne	100	100	109
SA, W=100%, ścieżki stat., zaokr.	96	96	109
BENDERS, W=0%, ścieżki statyczne	91	91	-
LAGRANGE, W=0%, ścieżki statyczne	81	100	-
CPLEX, W=0%, ścieżki statyczne	84	90	-
CPLEX, W=100%, ścieżki statyczne	84	-	-

Tabela 6.3. Rezultaty osiągnięte przez metodę SA dla Zadania 2

algorytm	ograniczenie dolne funkcji kosztu	koszt najlepszego rozwiązania	rozwiązanie na najkrótszych ścieżkach
SA, W=0%, ścieżki statyczne	109	109	109
SA, W=0%, ścieżki dynamiczne	109	109	109
SA, W=0%, ścieżki dynam., zaokr.	102	102	109
SA, W=100%, ścieżki statyczne	109	109	109
SA, W=100%, ścieżki dynamiczne	104	104	109
SA, W=100%, ścieżki dynam., zaokr.	98	98	109

7. Uwagi końcowe

W artykule opisaliśmy problemy wymiarowania odpornych na awarie sieci telekomunikacyjnych w ramach jednej warstwy zasobów sieci. Sformulowaliśmy dwa warianty zadań wymiarowania odpornego, a dla ich rozwiązywania zaproponowaliśmy metodę Symulowanej Alokacji (SA). Dotychczasowe doświadczenia wynikające z zastosowania SA do tych zadań potwierdzają jej skuteczność. Oczywiście, SA, jak każde stochastyczne podejście do optymalizacji dyskretniej, nie gwarantuje osiągania rozwiązań optymalnych. Porównanie wyników uzyskiwanych przez SA z wynikami innych metod świadczy jednak o zdolności tej metody do dostarczania dobrych rozwiązań suboptymalnych przy krótkich czasach obliczeń. Ponadto, SA pozwala łatwo uwzględnić następujące dodatkowe wymagania:

- agregację jednostek zapotrzebowania
- koszt stały otwarcia krawędzi (por. (2.1))
- nieliniowość funkcji kosztu i ograniczeń
- szczególne ograniczenia na rekonfigurację przepływów (jak np. w Zadaniu 2)
- udostępnienie wszystkich możliwych ścieżek dla realizacji przepływów.

Wymagań tych nie można uwzględnić w programowaniu liniowym, nawet przy całkowito-liczbowości zmiennych. Zauważmy, że ostatnie z nich jest realizowane w metodzie SA za pomocą reguły alokacji z dynamicznym wyborem ścieżki. Należy również podkreślić, że ze względu na podobieństwo do ogólnie znanej i stosowanej metody symulacyjnej analizy systemów telekomunikacyjnych metoda SA jest łatwa do zrozumienia i implementacji.

Literatura

- [AK96] Arabas, J., Kozdrowski, S.: *Applic. of Evolutionary Strategy to Network Design*, PSRT'96, Kraków 1996
- [ACL94] Ash, G.R., Chan, K.K., Labourdette, J.-F.: *Analysis and Design of Fully Shared Networks*, *Proceedings ITC14*, Elsevier Science B.V., 1994
- [Assa78] Assad, A.A.: *Multicommodity Network Flows - a Survey*, *Networks*, Vol.8, 1978
- [Che90] Chen, W.-K.: *Theory of Nets: Flows in Networks*, John Wiley & Sons, 1990
- [Cpl94] *Using the CPLEX Callable Library*, CPLEX Optimization, Inc., 1994
- [Fel77] Feller, W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Wydanie III, PWN, Warszawa 1977
- [GJ79] Garey, M.R., Johnson, D.S.: *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, 1979
- [KDP94] Krishnan, K.R., Doverspike, R.D., Pack, C.D.: *Unified Models of Survivability for Multi-Technology Networks*, *Proceedings ITC14*, Elsevier Science B.V., 1994
- [LT95] Lubacz, J., Tomaszewski, A.: *Generic network design procedures*, TD 40, COST 242, 1995
- [Med94] Medhi, D.: *A Unified Approach to Network Survivability for Teletraffic Networks: Models, Algorithms and Analysis*, *IEEE Trans. on Commun.*, vol.42, no. 2/3/4, 1994
- [PG94] Pióro, M., Gajowniczek, P.: *Simulated Allocation - a Suboptimal Solution to the Multicommodity Flow Problem*, *Proc. Eleventh UK Teletraffic Symposium*, Cambridge, 1994
- [PG95] Pióro, M., Gajowniczek, P.: *Stochastic allocation of virtual paths to ATM links*, *Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks*, Chapman & Hall, 1995
- [Pio95a] Pióro, M.: *Podstawy projektowania sieci publicznych*, *Materiały konferencyjne KST'95*, Bydgoszcz 1995
- [Pio95b] Pióro, M.: *Podstawy projektowania cyfrowych sieci telekomunikacyjnych*, Wydawnictwa EFP, Poznań 1995
- [PG96] Pióro, M., Gajowniczek, P.: *Solving Multicommodity Integral Flow Problems by Simulated Allocation*, artykuł przyjęty do druku w *Telecommunication Systems*, Baltzer Science Publishers, 1996
- [Szc96a] Szczesniak, M.: *Projektowanie sieci niezawodnych*, Praca Dyplomowa, Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996
- [Szc96b] Szczesniak, M.: *Zastosowanie dekompozycji Bendersa do projektowania niezawodnych sieci telekomunikacyjnych*, *KST'96*, Bydgoszcz 1996
- [VSH95] Veitch, P.A., Smith, D.G., Hawker, I.: *A Comparison of Pre-Planned Techniques for Virtual Path Restoration*, *3rd IFIP Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks*, Ilkley 1995
- [Wu92] Wu, T.: *Fiber Network Service Survivability*, Artech House, 1992